

Übungen zur Vorlesung Numerik I

(Blatt 7)

Sommersemester 2004

**Abgabe der Aufgaben 1,2,3,4 bis 08.06.04, 18.00 Uhr
im Postfach 84 Ebene 6
und Aufgabe 5 bis 15.06.04, 18.00 Uhr per E-Mail an
“lasch@math.uni-bremen.de“**

Aufgabe 1:

(4 Punkte)

Gegeben sei das LGS $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie ausgehend von der gestörten LR -Zerlegung mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.3367 & 1 & 0 \\ 0.6667 & 0.2040 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1.99 \\ 0 & 1.6833 & 2.33 \\ 0 & 0 & 2.2181 \end{pmatrix}$$

und $x_0 = (1.5, 0.5, 0.75)^T$ zwei Schritte der Nachiteration aus.

Aufgabe 2:

(4 Punkte)

Berechnen Sie mit dem Householder-Verfahren (Handrechnung) die Lösung des LGS $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3:

(5 Punkte)

Berechnen Sie die Lösung $x \in \mathbb{R}$ des linearen Ausgleichproblems ($m = 2, n = 1$)

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \|y - Ax\|_2^2, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mittels

- a) der Normalengleichung
- b) der QR -Zerlegung von A .

Bestimmen Sie jeweils das Residuum $\|y - Ax\|_2$.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Ein Versuch mit m Messungen führt auf ein lineares Ausgleichsproblem mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. A liege in QR -Zerlegung $A = QR$ vor. Es werde

- a) ein (erster) Meßwert hinzugefügt oder
- b) der (erste) Meßwert weggelassen.

Geben Sie Formeln zur Berechnung von $\tilde{Q}\tilde{R} = \tilde{A}$

$$\text{für } \tilde{A} = \begin{pmatrix} w^T \\ A \end{pmatrix} \text{ bzw. } A = \begin{pmatrix} z^T \\ \tilde{A} \end{pmatrix}$$

unter Benutzung der QR -Zerlegung von A an.

Aufgabe 5: (4 Programmierpunkte)

Schreiben Sie ein Programm zur Lösung des linearen Ausgleichproblems

$$\min\{\|y - Ax\|_2^2 \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

für $y \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mittels der QR -Zerlegung von A . Programmieren Sie darin eine eigene QR -Zerlegung!

Testen Sie das Programm an folgenden Daten:

Der Gezeitenstand der Nordsee werde in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) durch

$$H(t) = h + a \sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right) + b \cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right) \quad (1)$$

mit unbekannten Konstanten h, a, b beschrieben. Folgende Meßwerte liegen vor:

t	0	2	4	6	8	10	Stunden
$H(t)$	1.0	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8	m

Bestimmen Sie h, a, b indem Sie das dazugehörige lineare Ausgleichsproblem mit ihrem Programm lösen.

Hinweis: Die optimale Lösung lautet $h = 0.93333, a = 0.57735, b = 0.26667$.